Pelabelan 0-Anti Ajaib dan 2-Anti Ajaib untuk Graf Tangga L_n^m

0-*Antimagic and* 2-*Antimagic Labeling for Ladder Graph* L_n^m

Quinoza Guvil [1], Roni Tri Putra [2]

[1]Jurusan Teknik Geodesi, Institut Teknologi Padang, Telp. 0751-7055202.
Email: quinozaguvil@gmail.com
[2]Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Padang, Kampus Limau Manis Padang 25163 Telp. 0751-72590 Fax. 0751-72575. Email : putra_tryronny@yahoo.co.id

Abstract

For a connected graph G *and a subset* S *of* $V(G)$, $S \subseteq V(G)$. *For a vertex* $v \in V(G)$, *the distance betwen* v *and* S *is* $d(v,S) = min\{d(v,x) | x \in S\}$. *For an ordered k-partition of* $V(G)$, $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$, *the representation of* v *with respect to* Π *is* $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), \ldots, d(v,S_k))$. *The k-partition* Π *is a resolving partition if* $r(v|\Pi)$ *are distinct for every* $v \in V(G)$. *The minimum k for which there is a resolving partition of* $V(G)$ *is the partition dimension of* G, $pd(G)$. *In this paper will shown resolving partition of connected graph* G *order* n *where* $n \geq 3$ *is a bipartite graph. Then it is shown dimension partition of bipartite graph, are* $pd(K_{s,t}) = n - 1$.

Key words: Connected Graph, Bipartite Graph, Resolving Partition and Dimension Partition

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu bidang dalam matematika yang cukup penting untuk dipelajari dan dikembangkan. Salah satu topik kajian dalam teori graf adalah pelabelan graf. Objek kajian pada graf secara umum direpresentasikan oleh titik (*vertex*), sisi (*edge*), dan muka (*face*) yang disebut **label**. Pelabelan pertama kali diperkenalkan oleh Sedlàček (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Teori Graf mempunyai berbagai terapan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan, diantaranya dalam model jaringan transportasi, sistem komunikasi, silsilah keluarga, desain arsitektur.

Harstfield dan Ringel (1990) menyatakan bahwa pelabelan tipe $(1,1,1)$ adalah pemetaan satu-satu dari $V \cup E \cup F$ ke suatu himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,\ldots,|V(G)| + |E(G)| + |F(G)|\}$. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan daerah asal himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan muka adalah pelabelan dengan domain himpunan muka.

Jika pada pelabelan bobot titik, bobot sisi, atau bobot muka berbeda, maka pelabelan ini dikatakan dengan pelabelan anti ajaib. Jika bobot muka membentuk barisan aritmatika dengan beda *d*, maka pelabelan tersebut dinamakan **pelabelan *d*-anti ajaib**, sedangkan pelabelan ajaib jika memiliki bobot titik, bobot sisi, dan bobot muka yang sama, maka pelabelan disebut pelabelan ajaib.

Sejalan dengan masalah yang akan dibahas, penelitian ini mempunyai tujuan untuk menentukan pelabelan anti ajaib untuk graf tangga L_n^m dimana $n \geq 2$, dan $m \geq 1$ sehingga memiliki pelabelan tipe (1, 1, 1) dengan $d \in \{0,2\}$.

METODOLOGI

Metode penelitian dalam tulisan ini adalah pelabelan *d*-anti ajaib untuk plane graf L_n^m dimana $\mathrm{n} \geq 2$, dan $1 \leq \mathrm{m} \leq 4$

dan $d \in \{0,2\}$ sehingga memiliki pelabelan tipe (1, 1, 1). Serta untuk memeriksa bahwa nilai-nilai dari g_1 adalah $1,2, \dots, |V(L_n^m)|$.

Jika $i \in I, j \in J\ dan\ m \leq 2$, maka pelabelan sisi g_2 menggunakan setiap bilangan bulat $1,2, \dots, |E(L_n^m)|$ tepat satu.

Jika $i \in I, j \in J\ dan\ m \geq 3$, maka pelabelan sisi g_2 berturut-turut $1,2, \dots, m, (n-1)+5n-4, m(n-1)+5n-3$ dan nilai $m(n-1)+5n-1, m(n-1)+5n, \dots, |E(L_n^m)|+1$.

Nama titik dan sisi dari $L_n^m, n \geq 2, 1 \leq m \leq 4$ oleh pelabelan titik g_1 pelabelan sisi g_2. Dengan perhitungan langsung kita memperoleh bahwa:

a. Jika j ganjil, $j \in J - \{m+1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka bobot dari *3-side face* (under pelabelan titik g_1 dan pelabelan sisi $g_2$0 adalah

$$w_{g_1}(f_{i,j}) = n(3m+5-3j) + 2-3i,$$

$$w_{g_1}(h_{i,j}) = n(3m+4-3j) + 1-3i,$$

$$w_{g_2}(f_{i,j}) = n(2m-1) - 2m + (5n-2)j - 1 + i,$$

$$w_{g_2}(h_{i,j}) = 2m(n-1) + (5n-2)j - 1 + i.$$

b. Jika j genap, $j \in J - \{m+1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka bobot dari *3-side face* adalah

$$v_{g_1}(f_{i,j}) = n(3m+5-3j) + 1-3i,$$

$$v_{g_1}(h_{i,j}) = n(3m+4-3j) + 2-3i,$$

$$v_{g_2}(f_{i,j}) = n(2m-1) - 2m + (5n-2)j + i,$$

$$v_{g_2}(h_{i,j}) = 2m(n-1) + (5n-2)j - 2 + i.$$

Jika kita menamakan titik dan sisi dari L_n^m oleh g_1, masing-masing, maka untuk $n \geq 2\ dan\ m \leq 2$ kita memperoleh suatu pelabelan dengan nilai $1,2, \dots, |V(L_n^m)|, |V(L_n^m)|+1, |V(L_n^m)|+2, \dots, |V(L_n^m)|+|E(L_n^m)|\ dan\ untuk\ n \geq 2\ dan\ 3 \leq m \leq 4$

kita mempunyai sebuah hasil pelabelan dengan nilai $1,2, \dots, |V(L_n^m)|, |V(L_n^m)|+1, |V(L_n^m)|+2, \dots, |V(L_n^m)|+m(n-1)+5n-4, |V(L_n^m)|+m(n-1)+5n-3, |V(L_n^m)|+m(n-1)+5n-1, |V(L_n^m)|+m(n-1)+5n, \dots, |V(L_n^m)|+|E(L_n^m)|+1.$

Kita dapat melihat bahwa bobot dari semua *3-side faces* under hasil pelabelan merupakan sebuah himpunan W dari bilangan bulat yang berurutan

$$W = \left\{ \begin{matrix} w_{g_1}(f_{i,j}) + 3|V(L_n^m)| + w_{g_2}(f_{i,j}) : \\ i \in I - \{n\},\ j \in J - \{m+1\} \\ dan\ j\ ganjil \end{matrix} \right\}$$

Lengkapi pelabelan *face* g_3 dari L_n^m sehingga nilai $|V(L_n^m)|+|E(L_n^m)|+2, |V(L_n^m)|+|E(L_n^m)|+3, \dots, |V(L_n^m)|+|E(L_n^m)|+|F(L_n^m)|$

akan diberikan untuk *3-side face* dan tanpa batas eksternal mendapat nilai $|V(L_n^m)|+|E(L_n^m)|+1(jika\ n \geq 2, m \leq 2)$ atau nilai $|V(L_n^m)|+m(n-1)+5n-2(jika\ n \geq 2, 3 \leq m \leq 4$

Kita mampu menyusun nilai *face* dari *3-sided faces* sehingga pelabelan g_1, $|V(L_n^m)|+g_2$ dan g_3 dikombinasikan bersama dengan memberi suatu pelabelan dari tipe (1,1,1) dimana

(i) Seluruh *3-sided faces* memiliki persamaan bobot $6|V(L_n^m)|+2|E(L_n^m)|+|F(L_n^m)|+n+1$ atau

(ii) Bobot dari *3-sided faces* membentuk barisan aritmatika dengan beda d= 2

HASIL DAN PEMBAHASAN

Banyaknya titik di graf tangga L_n^m dengan 3-sisi muka adalah $|V(L_n^m)| = v$, dan $|E(L_n^m)| = e$, dengan

$v = n(m+1)$,

$e = m(3n-2) + n - 1$.

Misal $f_{i,j}$ adalah muka (*face*) dari graf tangga L_n^m dengan $i \in I$ dan $j \in J$, maka banyaknya muka $|F(L_n^m)| = f$, dengan

$f = 2(n-1)m + 1$.

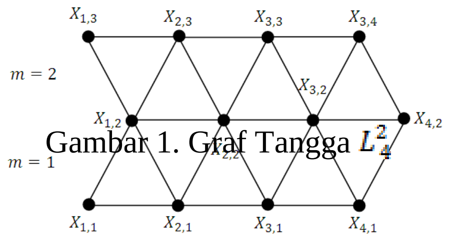
Definisi 1.

Misal $I = \{1, 2, \dots, n\}$ *dan* $J = \{1, 2, \dots, m+1\}$ *adalah himpunan indeks dimana* n *adalah titik dan* m *adalah bidang. Untuk* $n \geq 2, m \geq 1$, *graf* L_n^m *dikatakan graf tangga dengan 3-sisi muka memiliki himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:*

$V(L_n^m) = \{x_{i,j} : i \in I \; dan \; j \in J\}$

$E(L_n^m) = \{x_{i,j}x_{i+1,j} : i \in I - \{n\} \; dan \; j \in J\}$

Gambar 1. berikut mengilustrasikan sebuah graf tangga L_n^m 3-sisi muka dengan $m = 2$ dan $n = 4$.



Gambar 1. Graf Tangga L_4^2

Teorema 1.

Misalkan L_n^m, $n \geq 2$ dan $m \geq 1$ *sebuah graf tangga. Misalkan pelabelan titik* g_1 *adalah pelabelan* d_1*-anti ajaib, pelabelan sisi* g_2 *adalah pelabelan* d_2*-anti ajaib merupakan dan* g_3 *adalah pelabelan muka untuk* L_n^m. *Jika pelabelan* g_1,

$|V(L_n^m)| + g_2 \; dan \; |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + g_3$

digabungkan menjadi sebuah pelabelan d-anti ajaib dari tipe (1,1,1) maka parameter $d \leq 10$.

Bobot Muka d-Anti Ajaib pada Graf Tangga L_n^m

Bobot pada suatu graf *G* adalah jumlah nilai label untuk setiap titik, sisi, dan muka pada graf *G* tersebut. Bobot muka dalam pelabelan didefinisikan sebagai jumlah dari hasil pelabelan muka, titik-titik, dan sisi-sisi disekitar muka tersebut.

Pelabelan graf bidang disebut ***d*-anti ajaib** jika untuk setiap *s*, bobot dari himpunan *s*-sisi muka adalah

$W_s = \{a_s, a_s + d, a_s + 2d, \dots, a_s + (f_s - 1)d\}$

untuk suatu a_s dan *d* bilangan bulat $(a_s > 0, d \geq 0)$, dimana f_s adalah jumlah muka dengan *s*-sisi. Bobot W_s berbeda untuk setiap *s* berbeda.

Teorema 2.

Jika $n \geq 2$, $m \geq 1$, *dan* $d \in \{0,2\}$ *maka graf bidang memiliki sebuah pelabelan d-anti ajaib dari tipe (1,1,1).*

Bukti :

Lakukan pelabelan untuk semua titik dan pelabelan sisi dengan cara sebagai berikut:

- Pelabelan titik g_1

  $g_1(x_{i,j}) = n(m + 2 - j) + 1 - i$,

  jika $i \in I \; dan \; j \in J$, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ dan $J = \{1, 2, \dots, m+1\}$

- Pelabelan sisi g_2

  Berdasarkan Teorema 2, pelabelan sisi g_2 dapat dikonstruksikan dengan cara sebagai berikut:

  $g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) = (n-1)j + 1 - i$,

  jika $i \in I - \{n\}$ dan $j \in J$,

Kemudian tentukan bobot dari graf tangga L_n^m terhadap pelabelan titik g_1 dan pelabelan sisi g_2 sebagai berikut:

- jika j ganjil, $j \in J - \{m+1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka

  $w_{g_1}(f_{i,j}) = g_1(x_{i,j}) + g_1(x_{i+1,j}) + g_1(x_{i,j+1})$

$w_{g_2}(f_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) + g_2(x_{i,j}x_{i,j+1}) + g_2(x_{i+1,j}x_{i,j+1})$

dan

- Jika j genap, $j \in J - \{m+1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka

$v_{g_1}(f_{i,j}) = g_1(x_{i,j}) + g_1(x_{i+1,j}) + g_1(x_{i+1,j+1})$

$v_{g_1}(h_{i,j}) = g_1(x_{i,j}) + g_1(x_{i,j+1}) + g_1(x_{i+1,j+1}) v_{g_2}(f_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) + g_2(x_{i,j}x_{i+1,j+1}) + g_2(x_{i+1,j}x_{i+1,j+1})$

dan

$v_{g_2}(h_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i,j+1}) + g_2(x_{i,j+1}x_{i+1,j+1}) + g_2(x_{i,j}x_{i+1,j+1})$

Setelah bobot titik dan bobot sisi diperoleh, tentukan bobot setiap muka dengan menjumlahkan bobot titik, bobot sisi, dan pelabelan muka g_3.

- jika j ganjil, $j \in J - \{m+1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka

$W(f_{i,j}) = w_{g_1}(f_{i,j}) + w_{g_2}(f_{i,j}) + g_3$

$W(h_{i,j}) = w_{g_1}(h_{i,j}) + w_{g_2}(h_{i,j}) + g_3$

- Jika j genap, $j \in J - \{m+1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka

$V(f_{i,j}) = v_{g_1}(f_{i,j}) + v_{g_2}(f_{i,j}) + g_3$

$V(h_{i,j}) = v_{g_1}(h_{i,j}) + v_{g_2}(h_{i,j}) + g_3$

Jika bobot titik, bobot sisi, dan pelabelan muka digabungkan, maka diperoleh pelabelan dengan tipe $(1,1,1)$ dimana bobot W membentuk himpunan bilangan bulat berurutan untuk setiap muka yang bertetangga. Bobot muka W dengan 3-sisi muka membentuk barisan aritmatika dengan beda $W(f_{i,j}) - W(h_{i,j}) = 0$ atau $W(f_{i,j}) - W(h_{i,j}) = 2$.

Contoh 1. (kasus 1: $m = 2, n = 3$)

Misal diberikan $m = 2,\ n = 3$. Akan ditunjukkkan bahwa graf tangga L_3^2 memiliki pelabelan muka *d*-anti ajaib dengan 3-sisi muka dimana $d \in \{0,2\}$.

Untuk $m = 2,\ n = 3$ diperoleh $I = \{1,2,3\}$ dan $J = \{1,2,3\}$ dan graf tangga L_3^2 memiliki himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$$V(L_3^2) = \{x_{i,j} : i \in I \; dan \; j \in J\}$$
$$= \{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}\}$$
$$= \left\{ \begin{matrix} x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \\ x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3} \end{matrix} \right\}$$

$$E(L_3^2) = \left\{ \begin{matrix} x_{i,j}x_{i+1,j} : i \\ \in I - \{n\} \text{ dan } j \in J \end{matrix} \right\} \cup \left\{ \begin{matrix} x_{i,j}x_{i,j+1} : i \in I \text{ dan } j \in \\ J - \{m+1\} \end{matrix} \right\}$$
$$\cup \left\{ \begin{matrix} x_{i+1,j}x_{i,j+1} : i \in I - \{n\} \text{ dan} \\ j \in J - \{m+1\} \text{ dan } j \text{ ganjil} \end{matrix} \right\}$$
$$\cup \left\{ \begin{matrix} x_{i,j}x_{i+1,j+1} : i \in I - \{n\} \text{ dan} \\ j \in J - \{m+1\} \text{ dan } j \text{ genap} \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} x_{1,1}x_{2,1}, x_{1,2}x_{2,2}, x_{1,3}x_{2,3}, \\ x_{2,1}x_{3,1}, x_{2,2}x_{3,3} \end{matrix} \right\}$$
$$\cup \left\{ \begin{matrix} x_{1,1}x_{1,2}, x_{1,2}x_{1,3}, x_{2,1}x_{2,2}, \\ x_{2,2}x_{2,3}, x_{3,1}x_{3,2}, x_{3,2}x_{3,3} \end{matrix} \right\}$$
$$\cup \{x_{2,1}x_{1,2}, x_{3,1}x_{2,2}\}$$
$$\cup \{x_{1,2}x_{2,3}, x_{2,2}x_{3,3}\}.$$

Maka diperoleh,

$v = n(m+1) = 3(2+1) = 9$

$e = m(3n-2) + n - 1 = 2(3.3-2) + 3 - 1$

$= 16$

$f = 2(n-1)m + 1 = 2(3-1)2 + 1 = 9$

Selanjutnya dilakukan pelabelan terhadap graf tangga L_3^2 berdasarkan titik-titik, sisi-sisi dan muka internal serta muka eksternal yang telah diperoleh.

Berikut adalah langkah-langkah untuk melabeli graf tangga L_3^2.

1. Akan dilakukan pelabelan titik g_1 untuk $i \in I$ dan $j \in J$

Berdasarkan definisi dari pelabelan titik g_1 yaitu,

$g_1(x_{i,j}) = n(m+2-j)+\ 1-i,$ jika $i \in I$ dan $j\ \in J$

- Untuk $i\ = 1$,jika
- $j = 1$ maka
  $g_1(x_{1,1}) = 3(2+2-1)+1-1\ \ = 9$
- $j = 2$ maka
  $g_1(x_{1,2}) = 3(2+2-2)+1-1\ \ = 6$
- $j = 3$ maka
  $g_1(x_{1,3}) = 3(2+2-3)+1-1\ \ = 3$

- Untuk $i\ = 2$, jika
- $j = 1$ maka
  $g_1(x_{2,1}) = 3(2+2-1)+1-2\ = 8$
- $j = 2$ maka
  $g_1(x_{2,2}) = 3(2+2-2)+1-2\ = 5$
- $j = 3$ maka
  $g_1(x_{2,3}) = 3(2+2-3)+1-2\ = 2$
- Untuk $i\ = 3$, jika
- $j = 1$ maka
  $g_1(x_{3,1}) = 3(2+2-1)+1-3 = 7$
- $j = 2$ maka
  $g_1(x_{3,2}) = 3(2+2-2)+1-3 = 4$
- $j = 3$ maka
  $g_1(x_{3,3}) = 3(2+2-3)+1-3 = 1$

Pelabelan g_1 menghasilakan himpunan $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ sebagai himpunan label untuk titik.

2. Akan dilakukan pelabelan sisi g_2 dengan definisi,

❖ $g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) = (n-1)j+\ 1-i,$ jika $i \in I - \{n\}$ dan $j\ \in J$

- Untuk $i\ = 1$, jika
- $j = 1$ maka
  $g_2(x_{1,1}x_{2,1}) = (3-1)1+\ 1-1 = 2$
- $j = 2$ maka
  $g_2(x_{1,2}x_{2,2}) = (3-1)2+\ 1-1 = 4$
- $j = 3$ maka
  $g_2(x_{1,3}x_{2,3}) = (3-1)3+\ 1-1\ = 6$

- Untuk $i\ = 2$, jika
  $j = 1$ maka
  $g_2(x_{2,1}x_{3,1}) = (3-1)1+\ 1-2 = 1$
- $j = 2$ maka
  $g_2(x_{2,2}x_{3,2}) = (3-1)2+\ 1-2\ = 3$
- $j = 3$ maka
  $g_2(x_{2,3}x_{3,3}) = (3-1)3+\ 1-2 = 5$

❖ $g_2(x_{i,j}x_{i,j+1})$

$$= \begin{cases} m(n-1)+n(j+1)-2+i\,, \\ \quad \text{jika } i \in I \text{ dan } j \leq 2 \\ m(n-1)+n(j+3)-3+i, \\ \quad \text{jika } i \in I, \text{dan } j \geq 3 \end{cases}$$

- Untuk $i\ = 1$, jika
- $j = 1$ maka
  $g_2(x_{1,1}x_{1,2}) = 2(3-1)+3(1+1)-2+1 = 9$

- $j = 2$ maka
  $g_2(x_{1,2}x_{1,3}) = 2(3-1)+3(2+1)-2+1$
  $= 12$

- Untuk $i\ = 2$, jika
- $j = 1$ maka
  $g_2(x_{2,1}x_{2,2}) = 2(3-1)+3(1+1)-2+2$
  $= 10$
- $j = 2$ maka
  $g_2(x_{2,2}x_{2,3}) = 2(3-1)+3(2+1)-2+2 = 13$

- Untuk $i\ = 3$, jika
  $j = 1$ maka
  $g_2(x_{3,1}x_{3,2}) = 2(3-1)+3(1+1)-2+3 = 11$

- $j = 2$ maka
  $g_2(x_{3,2}x_{3,3}) = 2(3-1) + 3(2+1) - 2 + 3 = 14$

❖ $g_2(x_{i+1,j}x_{i,j+1}) = (n-1)(m+1) + \frac{j-1}{2}(4n-1) + i$, jika $i \in I - \{n\}$ dan $j \in J - \{m+1\}$ dan *j* ganjil,

➢ Untuk $i = 1$, jika
- $j = 1$ maka
  $g_2(x_{2,1}x_{1,2}) = (3-1)(2+1) + \frac{1-1}{2}(4(3)-1) + 1 = 7$

➢ Untuk $i = 2$, jika
- $j = 1$
  maka
  $g_2(x_{3,1}x_{2,2}) = (3-1)(2+1) + \frac{1-1}{2}(4(3)-1) + 2 = 8$

❖ $g_2(x_{i,j}x_{i+1,j+1}) = m(n-1) + \frac{j}{2}(4n-1) - 1 + i,$
jika
$i \in I - \{n\}$ dan $j \in J - \{m+1\}$ dan *j* genap

➢ Untuk $i = 1$, jika
- $j = 2$ maka

$$g_2(x_{1,2}x_{2,3}) = 2(3-1) + \frac{2}{2}(4(3)-1) - 1 + 1 = 15$$

➢ Untuk $i = 2$, jika
- $j = 2$ maka

$$g_2(x_{2,2}x_{3,3}) = 2(3-1) + \frac{2}{2}(4(3)-1) - 1 + 2 = 16$$

Diperoleh himpunan label untuk sisi berdasarkan pelabelan g_2 yaitu

$$g_2 = \{|V(L_3^2)| + g_2\}$$

$$= \{9+1, 9+2, 9+3, 9+4, 9+5, 9+6, 9+7, 9+8, 9+9, 9+10, 9+11, 9+12, 9+13, 9+14, 9+15, 9+16\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \\ 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 \end{matrix}\right\}.$$

3. Akan dilakukan pelabelan muka g_3 dengan definisi sebagai berikut,

❖ Himpunan pelabelan muka internal

$$f_{int} = \{|V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 2, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 3, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 4, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 5, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 6, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 7, |V(L_n^m)| + |E(L_n^m)| + 9\}$$

$$f_{int} = \{(9+16+2), (9+16+3), (9+16+4), (9+16+5), (9+16+6), (9+16+7), (9+16+8), (9+16+9)\}$$

$$f_{int} = \{27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34\}$$

❖ Untuk pelabelan muka eksternal

$$f_{ext} = |V(L_3^2)| + |E(L_3^2)| + 1 = 9 + 16 + 1 = 26$$

4. Akan ditentukan bobot untuk setiap muka terhadap terhadap pelabelan titik g_1 dengan cara sebagai berikut,

➢ Jika j ganjil, $j \in J - \{m+1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka bobot dari *3*-sisi muka adalah

$$w_{g_1}(f_{i,j}) = n(3m + 5 - 3j) + 2 - 3i$$

$$w_{g_1}(h_{i,j}) = n(3m + 4 - 3j) + 1 - 3i$$

- Untuk $j = 1$ dan $i = 1$

$$w_{g_1}(f_{1,1}) = 3(3(2) + 5 - 3(1)) + 2 - 3(1) = 23$$

$w_{g_1}(h_{1,1}) = 3(3(2) + 4 - 3(1)) + 1 - 3(1)$
$= 19$

- Untuk $j = 1\ dan\ i = 2$
  $w_{g_1}(f_{2,1}) = 3(3(2) + 5 - 3(1)) + 2 - 3(2)$
  $= 20$

  $w_{g_1}(h_{2,1}) = 3(3(2) + 4 - 3(1)) + 1 - 3(2)$
  $= 16$

➢ Jika j genap, $j \in J - \{m+1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka bobot dari 3-sisi muka adalah
$v_{g_1}(f_{i,j}) = n(3m + 5 - 3j) + 1 - 3i$
$v_{g_1}(h_{i,j}) = n(3m + 4 - 3j) + 2 - 3i$

- Untuk $j = 2\ dan\ i = 1$
  $v_{g_1}(f_{1,2}) = 3(3(2) + 5 - 3(2)) + 1 - 3(1)$
  $= 13$

  $v_{g_1}(h_{1,2}) = 3(3(2) + 4 - 3(2)) + 2 - 3(1)$
  $= 11$

- Untuk $j = 2\ dan\ i = 2$
  $v_{g_1}(f_{2,2}) = 3(3(2) + 5 - 3(2)) + 1 - 3(2)$
  $= 10$

  $v_{g_1}(h_{2,2}) = 3(3(2) + 4 - 3(2)) + 2 - 3(2)$
  $= 8$

Himpunan bobot titik graf
$L_3^2 = \{8, 10, 11, 13, 16, 19, 20, 23\}$.

5. Akan ditentukan bobot untuk setiap muka terhadap terhadap pelabelan sisi g_2 dengan cara sebagai berikut,

➢ Jika j ganjil, $j \in J - \{m+1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka bobot dari 3-sisi muka adalah
$w_{g_2}(f_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) + g_2(x_{i,j}x_{i,j+1}) + g_2(x_{i+1,j}x_{i,j+1})$
$w_{g_2}(h_{1,1}) = g_2(x_{i+1,j}x_{i,j+1}) + g_2(x_{i,j+1}x_{i+1,j+1}) + g_2(x_{i+1,j}x_{i+1,j+1})$

- Untuk $j = 1$ dan $i = 1$
  $w_{g_2}(f_{1,1}) = g_2(x_{1,1}x_{2,1}) + g_2(x_{1,1}x_{1,2}) + g_2(x_{2,1}x_{1,2})$
  $= 11 + 18 + 1$
  $= 45$
  $w_{g_2}(h_{1,1}) = g_2(x_{2,1}x_{1,2}) + g_2(x_{1,2}x_{2,2}) + g_2(x_{2,1}x_{2,2})$
  $= 16 + 13 + 19$
  $= 48$

- Untuk $j = 1$ dan $i = 2$
  $w_{g_2}(f_{2,1}) = g_2(x_{2,1}x_{3,1}) + g_2(x_{2,1}x_{2,2}) + g_2(x_{3,1}x_{2,2})$
  $= 10 + 19 + 17$
  $= 46$

  $w_{g_2}(h_{2,1}) = g_2(x_{3,1}x_{2,2}) + g_2(x_{2,2}x_{3,2}) + g_2(x_{3,1}x_{3,2})$
  $= 17 + 12 + 20$
  $= 49$

➢ Jika j genap, $j \in J - \{m+1\}$ dan $i \in I - \{n\}$ maka bobot dari 3-sisi muka adalah
$v_{g_2}(f_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) + g_2(x_{i,j}x_{i+1,j+1}) + g_2(x_{i+1,j}x_{i+1,j+1})$

$v_{g_2}(h_{i,j}) = g_2(x_{i,j}x_{i,j+1}) + g_2(x_{i,j+1}x_{i+1,j+1}) + g_2(x_{i,j}x_{i+1,j+1})$

- Untuk $j = 2$ dan $i = 1$
  $v_{g_2}(f_{1,2}) = g_2(x_{1,2}x_{2,2}) + g_2(x_{1,2}x_{2,3}) + g_2(x_{2,2}x_{2,3})$
  $= 13 + 24 + 22$
  $= 59$

$$v_{g_2}(h_{1,2}) = g_2(x_{1,2}x_{1,3}) + g_2(x_{1,3}x_{2,3}) + g_2(x_{1,2}x_{2,3})$$
$$= 21 + 15 + 24$$
$$= 60$$

- Untuk $j = 2$ dan $i = 2$

$$v_{g_2}(f_{2,2}) = g_2(x_{2,2}x_{3,2}) + g_2(x_{2,2}x_{3,3}) + g_2(x_{3,2}x_{3,3})$$
$$= 12 + 25 + 23$$
$$= 60$$

$$v_{g_2}(h_{2,2}) = g_2(x_{2,2}x_{2,3}) + g_2(x_{2,3}x_{3,3}) + g_2(x_{2,2}x_{3,3})$$
$$= 22 + 14 + 25$$
$$= 61$$

Himpunan bobot sisi graf $L_3^2 = \{45, 46, 48, 49, 59, 60, 60, 61\}$.

6. Akan ditentukan bobot muka dari penggabungan bobot titik, bobot sisi dan pelabelan g_3 dengan cara sebagai berikut:

$$W_{f_{1,1}} = w_{g_1}(f_{1,1}) + w_{g_2}(f_{1,1}) + g_3$$
$$= 23 + 45 + 31$$
$$= 99$$

$$W_{h_{1,1}} = w_{g_1}(h_{1,1}) + w_{g_2}(h_{1,1}) + g_3$$
$$= 19 + 48 + 32$$
$$= 99$$

$$W_{f_{2,1}} = w_{g_1}(f_{2,1}) + w_{g_2}(f_{2,1}) + g_3$$
$$= 20 + 46 + 33$$
$$= 99$$

$$W_{h_{2,1}} = w_{g_1}(h_{2,1}) + w_{g_2}(h_{2,1}) + g_3$$
$$= 16 + 49 + 34$$
$$= 99$$

$$W_{f_{1,2}} = w_{g_1}(f_{1,2}) + w_{g_2}(f_{1,2}) + g_3$$
$$= 13 + 59 + 27$$
$$= 99$$

$$W_{h_{1,2}} = w_{g_1}(h_{1,2}) + w_{g_2}(h_{1,2}) + g_3$$
$$= 11 + 60 + 28$$
$$= 99$$

$$W_{f_{2,2}} = w_{g_1}(f_{2,2}) + w_{g_2}(f_{2,2}) + g_3$$
$$= 10 + 60 + 29$$
$$= 99$$

$$W_{h_{2,2}} = w_{g_1}(h_{2,2}) + w_{g_2}(h_{2,2}) + g_3$$
$$= 8 + 61 + 30$$
$$= 99$$

Jadi diperoleh himpunan bobot muka graf $L_3^2 = \{99, 99, 99, 99, 99, 99, 99, 99\}$.

Defenisikan pelabelan titik-titik, sisi-sisi, dan muka berturut-turut sebagai g_1, g_2, dan g_3. Akan diperoleh pelabelan dengan tipe $(1, 1, 1)$ dan 3-sisi muka pada graf tangga L_3^2

$$W_{f_{1,1}} = w_{g_1}(f_{1,1}) + w_{g_2}(f_{1,1}) + g_3$$
$$= 23 + 45 + 3$$
$$= 98$$

$$W_{h_{1,1}} = w_{g_1}(h_{1,1}) + w_{g_2}(h_{1,1}) + g_3$$
$$= 19 + 48 + 29$$
$$= 96$$

$$W_{f_{2,1}} = w_{g_1}(f_{2,1}) + w_{g_2}(f_{2,1}) + g_3$$
$$= 20 + 46 + 28$$
$$= 94$$

$$W_{h_{2,1}} = w_{g_1}(h_{2,1}) + w_{g_2}(h_{2,1}) + g_3$$
$$= 16 + 49 + 27$$
$$= 92$$

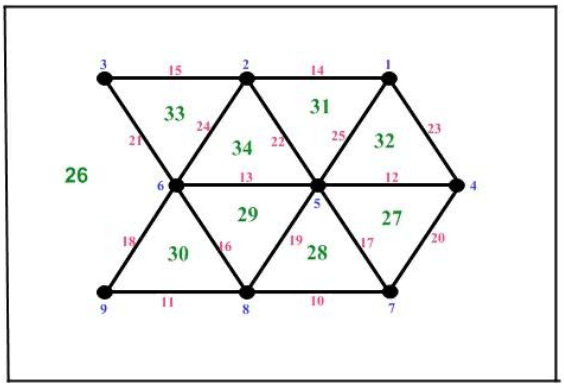
$$W_{f_{1,2}} = w_{g_1}(f_{1,2}) + w_{g_2}(f_{1,2}) + g_3$$
$$= 13 + 59 + 34$$
$$= 106$$

$$W_{h_{1,2}} = w_{g_1}(h_{1,2}) + w_{g_2}(h_{1,2}) + g_3$$
$$= 11 + 60 + 33$$
$$= 104$$

$$W_{f_{2,2}} = w_{g_1}(f_{2,2}) + w_{g_2}(f_{2,2}) + g_3$$
$$= 10 + 60 + 32$$
$$= 102$$

$$W_{h_{2,2}} = w_{g_1}(h_{2,2}) + w_{g_2}(h_{2,2}) + g_3$$
$$= 8 + 61 + 31$$
$$= 100$$

Jadi diperoleh himpunan bobot muka $W = \{92, 94, 96, 98, 100, 102, 104, 106\}$. Dari himpunan bobot muka *W* pada graf tangga L_3^2 dengan 3-sisi muka membentuk barisan aritmatika dengan beda $d = 2$ seperti Gambar 2.



Gambar 2. Pelabelan Tipe $(1,1,1)$ Graf Tangga L_3^2 dengan $d = 2$

Setiap 3-sisi muka memiliki bobot muka yang membentuk barisan aritmatika dengan $d \in \{0,2\}$. Dengan demikian pelabelan graf tangga L_n^m merupakan pelabelan muka d-anti ajaib dengan tipe $(1,1,1)$.

SIMPULAN

Adapun kesimpulan dari penelitian ini bahwa bobot muka dari graf tangga L_n^m dengan 3-sisi muka, $n \geq 1$ dan $m \geq 1$ dapat disusun sedemikian sehingga jika pelabelan g_1, $|V(L_n^m)| + g_2$ dan g_3 digabung diperoleh pelabelan tipe (1,1,1) dimana

1. Seluruh 3-sisi muka memiliki bobot yang sama untuk $d = 0$ dan
2. Bobot dari 3-sisi muka membentuk barisan aritmatika dengan beda $d = 2$.

SARAN

Karena berbagai keterbatasan, penulis menyadari penelitian dan tulisan ini masih banyak kekurangannya. Banyak hal yang belum tercakup dalam penelitan ini. Dalam penelitian ini hanya dibahas pelabelan muka *d*-anti ajaib untuk graf tangga L_n^m dengan 3-sisi muka. Perlu dikaji lebih lanjut pelabelan muka untuk graf tangga lainnya seperti graf *honeycomb* dan graf *grid*.

DAFTAR PUSTAKA

Baca, M dan Miller,M, 2008, *Super Edge-Antimagic Graphs*, Brown Walker Press,Boca Raton-Florida.

Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R.. 1976. *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press LTD. London.

Hartsfield, N dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*, Academic Press. Boston.

Ko- Wei Lih. 1983. *On Magic and Consecutive Labeling Of Plane Graphs*, Utilitas Math. 24 .165-197.

Oss, S.L., *Differential Equations*, 3^{rd} edition, John Wiley & Sons, University of New Hampshire, 1984.

Verhultz, Ferdinand, 1990, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer – Verlag, Berlin.

Wiggins S, 1990, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and*

Chaos, Springer – Verlag, New York.

Wallis, W.D. 2001. *Magic Graphs*, *Birkhauser*, Berlin. Boston-Basel.

West, D.B. 1996. *An Introduction to Graph Theory*. Prentice – Hall.