Kestabilan Model Epidemi SEIR Dengan Laju Insidensi

Stability of a SEIR Epidemic Model with Incidence Rate

Roni Tri Putra[1], Sukatik[2] & Sri Nita[3]

[1),2)] Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Padang, Kampus Unand Limau Manis Padang
Telp. 0751-72590 Fax. 0751-72576. Email : putra_tryronny@yahoo.co.id dan atik_wiryosentono@yahoo.co.id
[3)]Jurusan Teknik Elektro, Politeknik Negeri Padang, Kampus Unand Limau Manis Padang
Telp. 0751-72590 Fax. 0751-72576. Email : srinita0610@gmail.com

Abstract

In this paper, it will be studied stability for a SEIR epidemic model with infectious force in latent, infected and immune period with incidence rate. From the model it will be found investigated the existence and uniqueness solution of points its equilibrium. Existence solution of points equilibrium proved by show its differential equations system of equilibrium continue, and uniqueness solution of points equilibrium proved by show its differential equation system of equilibrium differentiable continue.

Keywords : existence solution, uniqueness solution, equilibrium points, incidence rate

PENDAHULUAN

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasi dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia riil dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari problem dunia riil menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai “Model Matematika”. Konstruksi, analisis dan penggunaan model matematika dipandang sebagai salah satu aplikasi matematika yang paling penting.

Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda. Kita dapat mencari aplikasi model matematika di bidang-bidang seperti fisika, ilmu sosial dan politik, ekonomi, bisnis dan keuangan, problem-problem jaringan komputer, serta ilmu biologi dan kedokteran. Diantara aplikasi model matematika pada bidang ilmu biologi dan kedokteran adalah model matematika yang berkaitan dengan penyakit menular. Pemodelan penyakit menular mendapat perhatian besar dalam studi epidemiologi. Tujuan utama dari pemodelan adalah menjawab peran infeksi penyakit dalam mengatur populasi alami, yaitu mengurangi fluktuasi alami populasi yang terinfeksi.

Penerapan model matematika dan teknik matematika untuk mendalami masalah *biosciences* dipelajari dalam *mathematical biosciences*. Salah satu cabang *mathematical biosciences* adalah *mathematical epidemiology*, yang mempelajari tentang penyebaran dan pengendalian penyakit. Mempelajari model epidemi yang didalamnya termasuk penyakit penyebab kematian pada suatu populasi total yang berubah merupakan hal penting dalam *mathematical epidemiology*.

Banyak model-model matematika yang telah dikembangkan, bertujuan untuk mempelajari penularan penyakit, untuk mengevaluasi penyebaran dari epidemi, dapat mencegah adanya penyakit atau untuk meminimalisir penyebaran penyakit. Dalam kurun waktu yang panjang, memahami perilaku penyakit akan membantu untuk mengetahui apakah epidemi akan menghilang atau tetap berada dalam suatu populasi.

Epidemi merupakan suatu keadaan dimana berjangkitnya suatu penyakit menular dalam populasi pada suatu tempat yang melebihi perkiraan kejadian normal dalam periode yang singkat. Bila penyakit tersebut selalu terdapat dalam suatu tempat begitupun dengan faktor penyebabnya maka dikatakan *Endemic*, kemudian bila penyakit tersebut mempunyai ruang lingkup penyebaran yang sangat luas (global) maka disebut *Pandemic*. Model epidemi adalah model matematika yang digunakan untuk mengetahui penyebaran penyakit menular, khususnya menyangkut terjadi atau tidaknya keadaan epidemi serta pengaruh yang ditimbulkan.

Perilaku dinamik dari sistem untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit terdapat beberapa model matematika yang sering digunakan. Model-model tersebut memiliki konsep yang sama yaitu *compartmental epidemiologi* (pembagian kelas) yang menggambarkan penyebaran penyakit dari masing-masing kelas. Jadi dalam suatu populasi akan terbagi menjadi beberapa kelas dimana masing-masing kelas mewakili tahapan yang berbeda. Kelas *S* (*susceptible*) digunakan untuk mewakili individu-individu yang rentan terhadap infeksi virus, kemudian kelas *I* (*infectious*) digunakan untuk mewakili individu-individu yang telah terinfeksi dan mampu menularkan atau menyebarkan penyakit ke individu pada populasi rentan, untuk kelas *R* (*recovered*) digunakan untuk mewakili individu-individu terinfeksi yang telah sembuh dari penyakit dan memiliki kekebalan permanen yang artinya individu tersebut tidak akan terinfeksi lagi untuk jenis penyakit yang sama. Namun pada model SIRS, kelas *R*(*recovered*) mewakili individu-individu yang telah sembuh dan akan terbebas dari infeksi virus kemudian akan memasuki populasi rentan (*susceptible*) kembali. Pada model-model epidemik yang memperhatikan adanya periode laten(masa inkubasi) seperti model SEIR, MSEIR terdapat kelas *E*(*exposed*) yang digunakan untuk mewakili individu-individu yang baru terinfeksi dan memasuki periode latent, dalam periode ini individu tersebut tidak memiliki kemampuan untuk menularkan penyakit ke individu lain sedangkan kelas *M* (*Maternallyderivedimmunity*) digunakan untuk mewakili individu-individu yang baru lahir dan memiliki kekebalan pasif yang didapatkan dari ibunya, namun hal ini hanya berlangsung sementara kemudian individu pada kelas M ini akan memasuki kelas rentan (*susceptible*). Model matematika epidemi diantaranya SIR, SIRS, SEIR, MSEIR dan termasuk model SVID.

Berbagai macam penyakit epidemi seperti campak *(measles)*, *tubercoloses*, malaria dan *Human Immunodeficiency Virus (HIV)* mempunyai periode laten. Periode laten adalah selang waktu dimana suatu individu terinfeksi sampai munculnya penyakit. Adanya periode laten ini menjadi alasan pembentukan model epidemi SEIR, yakni munculnya kelas *exposed*. Dalam tulisan ini hanya akan dibahas model epidemi SEIR.

Ada berbagai model matematika epidemi yang dikenal berdasarkan sifat atau ciri–ciri penyakitnya. Misalnya S, E, I dan R berturut–turut menunjukkan *Susceptible* (kelas populasi yang rentan), *Exposed* (kelas populasi yang laten), *Infectious* (kelas populasi yang terinfeksi) dan *Recovered* (kelas populasi yang sembuh).

Dengan berbagai asumsi, dikenal berbagai model epidemi, diantaranya SIR, SIRS, SEIR, SEIRS dan SEIS. Dalam model SIR, individu yang sembuh mempunyai kekebalan sehingga tidak lagi menjadi rentan, sedangkan untuk model SIRS individu yang sudah sembuh tidak memiliki kekebalan terhadap penyakit tersebut sehingga dapat menjadi rentan lagi. Dalam model SEIR, SEIRS dan SEIS individu yang rentan melalui masa laten setelah terinfeksi sebelum menjadi terjangkit.

Dari berbagai literatur belum banyak yang mengkaji model matematika epidemi SEIR dengan laju insidensi secara sistematis. Sejalan dengan masalah yang akan dibahas, penelitian ini mempunyai tujuan sebagai berikut :

1. Membentuk model matematika epidemi SEIR pada populasi manusia dengan laju insidensi.
2. Menentukan titik – titik ekuilibrium model epidemi SEIR tersebut.

3. Menyelidiki eksistensi dan ketunggalan solusi titik ekuilibrium model epidemi SEIR.

Hasil penelitian ini diharapkan dapat :
1. Secara umum diharapkan dapat memberikan manfaat dan sumbangan terhadap ilmu pengetahuan, serta untuk menambah wawasan khususnya dalam bidang matematika terapan.
2. Secara khusus diharapkan dapat memberikan gambaran tentang eksistensi dan ketunggalan solusi titik ekuilibrium model epidemi SEIR dengan kemampuan infeksi pada kelas laten, infeksi dan sembuh dengan laju insidensi.

METODOLOGI

Metode penelitian dalam tulisan ini adalah dengan cara studi literatur serta bahan pustaka sebagai referensi untuk mempelajari model epidemi SEIR dengan laju insidensi. Langkah pertama adalah dengan menentukan asumsi-asumsi yang berkaitan dengan model epidemi SEIR sesuai dengan karakteristik penyakit yang dimodelkan, kemudian akan dibuat model matematika epidemi SEIR dalam bentuk sistem persamaan diferensial.

Selanjutnya, menentukan titik-titik ekuilibrium model epidemi SEIR tersebut dengan menggunakan definisi titik ekuilibrium suatu sistem persamaan diferensial. Setelah menentukan titik – titik ekuilibrium model tersebut, langkah selanjutnya menyelidiki eksistensi dan ketunggalan solusi dari titik ekuilibrium model epidemi SEIR tersebut.

Eksistensi solusi dari titik ekuilibrium model epidemi SEIR dibuktikan dengan menunjukkan bahwa sistem persamaan diferensial dari titik ekuilibrium model epidemi SEIR tersebut kontinu, sedangan ketunggalan solusi dari titik ekuilibrium model epidemi SEIR dibuktikan dengan menunjukkan bahwa sistem persamaan diferensial dari titik ekuilibrium model epidemi SEIR tersebut diferensiabel kontinu.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model SEIR (*Susceptible, Exposed, infectious, recovered*) pertama kali dikembangkan oleh Kermack dan Mckendrick (1927) dengan memakai asumsi sederhana tentang laju penyebaran dan penyembuhan penyakit. Dalam modelnya, Kermack dan Mckendrick membagi populasi total (*N*) menjadi empat kelas, yaitu *Susceptible* $\left(S(t)\right)$ merupakan jumlah individu yang rentan terinfeksi dan mudah ditulari penyakit, *Exposed* $\left(E(t)\right)$ merupakan jumlah individu yang sudah terinfeksi tetapi belum menginfeksi, *Infectious* $(I(t))$ adalah jumlah individu yang terinfeksi, dan *Recovered* $(R(t))$ menotasikan jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit.

Laju insidensi adalah situasi dimana jumlah kontak per *infective* dalam unit waktu adalah konstan. Laju kontak adalah β dan *incidence* yang berhubungan adalah $\beta \frac{S}{N} I$.
Ketika jumlah total populasi *N* cukup besar, sejak itu jumlah kontak yang dibuat satu individu *infective* per unit waktu akan terbatas, atau menurun dengan cepat seiring meningkatnya *N*.
Insidensi adalah gambaran tentang frekuensi penderita baru suatu penyakit yang ditemukan pada suatu waktu tertentu di satu kelompok masyarakat.
Untuk dapat menghitung angka insidensi suatu penyakit, sebelumnya harus diketahui terlebih dahulu tentang :
- Data tentang jumlah penderita baru.
- Jumlah penduduk yang mungkin terkena penyakit baru *(Population at risk)*.

Secara umum angka insiden ini dapat dibedakan menjadi 3 macam, yaitu :

a. Incidence Rate (Laju Insidensi)
Yaitu Jumlah penderita baru suatu penyakit yang ditemukan pada suatu jangka waktu tertentu (umumnya 1 tahun) dibandingkan dengan jumlah penduduk yang mungkin terkena penyakit baru tersebut pada

pertengahan jangka waktu yang bersangkutan.
Manfaat laju insidensi adalah :
- Mengetahui masalah kesehatan yang dihadapi
- Mengetahui Resiko untuk terkena masalah kesehatan yang dihadapi
- Mengetahui beban tugas yang harus diselenggarakan oleh suatu fasilitas pelayanan kesehatan.

b. Attack Rate

Yaitu Jumlah penderita baru suatu penyakit yang ditemukan pada suatu saat dibandingkan dengan jumlah penduduk yang mungkin terkena penyakit tersebut pada saat yang sama. Manfaat Attack Rate adalah memperkirakan derajat serangan atau penularan suatu penyakit. Makin tinggi nilai Attack Rate, maka makin tinggi pula kemampuan Penularan penyakit tersebut.

c. Secondary Attack Rate

Yaitu jumlah penderita baru suatu penyakit yang terjangkit pada serangan kedua dibandingkan dengan jumlah penduduk dikurangi orang/penduduk yang pernah terkena penyakit pada serangan pertama. *Secondary Attack Rate* digunakan untuk menghitung suatu penyakit menular dan dalam suatu populasi yang kecil (misalnya dalam satu keluarga).
Dari 3 ukuran yang ada di atas yang paling sering dipakai dan menjadi ukuran dasar adalah laju insidensi. Laju insidensi ini digunakan dalam pengukuran epidemiologi baik penyakit maupun kematian.

Konstruksi Model

Pertama ditentukan beberapa asumsi dasar serta notasi yang digunakan sebagai berikut

1. Populasi bercampur secara homogen, artinya setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama untuk melakukan kontak dengan individu lain dalam populasi.
2. Terdapat periode inkubasi, sehinga individu *susceptible* yang terinfeksi penyakit tidak dapat secara langsung menularkan penyakitnya kepada individu lain.
3. Rata-rata banyaknya individu yang terinfeksi oleh kelas I adalah βSI , dengan β adalah laju kontak harian, yaitu rata-rata banyaknya kontak per hari yang cukup bagi satu individu *infectious* untuk menularkan penyakit kepada individu *susceptible*.
4. Individu yang baru lahir masuk ke kelas *susceptible*.

Model epidemi SEIR dengan laju insidensi adalah :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= b - \frac{\beta SI}{N} - \mu S\,;\ \ t \geq 0,\\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\mu + e)E\,;\ \ t \geq 0,\\ \frac{dI}{dt} &= eE - (\gamma + \mu)I;\ \ \ t \geq 0,\\ \frac{dR}{dt} &= \sigma I - \mu R;\ \ t \geq 0,\\ S(0) &= S_0,\ E(0) = E_0,\ I(0) = I_0,\end{aligned} \qquad (1)$$

dengan $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N(t)$, b adalah laju rekrutmen populasi, μ adalah laju kematian alami populasi, β adalah laju kontak, e adalah laju perubahan individu *exposed* menjadi individu *infectious*, dan γ adalah laju kesembuhan individu *infectious*. Diasumsikan nilai parameter bernilai positif, $b, \beta, \mu, e, \gamma, \sigma > 0$, dan nilai awal bernilai nonnegatif, $S_0, E_0, I_0, R(0) \geq 0$. Dengan menjumlahkan semua persamaan pada Sistem (1) diperoleh :

$$\frac{dN}{dt} = b - \mu N\,.$$

Sistem (1) dapat direduksi menjadi sistem tiga dimensi, karena variabel R tidak muncul pada persamaan pertama, kedua, dan ketiga. Sehingga dalam hal ini, diperoleh sistem yang lebih sederhana

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= b - \frac{\beta SI}{N} - \mu S\,;\ \ t \geq 0,\\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\mu + e)E\,;\ \ t \geq 0,\end{aligned} \qquad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = eE - (\gamma + \mu)I; \quad t \geq 0.$$

Titik Ekuilibrium

Sistem (2) mencapai ekuilibrium jika memenuhi :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= b - \frac{\beta SI}{N} - \mu S = 0, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\mu + e)E = 0, \\ \frac{dI}{dt} &= eE - (\gamma + \mu)I = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

Diketahui $\frac{dN}{dt} = b - \mu N$, sehingga jumlah populasi total pada saat mencapai ekuilibrium adalah

$$\frac{dN}{dt} = b - \mu N = 0 \Leftrightarrow N = \frac{b}{\mu}$$

Dari persamaan ketiga Sistem (3) diperoleh

$$E = \frac{(\gamma + \mu)}{e} I \tag{4}$$

Jika nilai E disubstitusikan pada persamaan kedua diperoleh:

$$\frac{\beta SI}{N} - \frac{(\mu + e)(\gamma + \mu)}{e} I = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\beta S}{N} - \frac{(\mu + e)(\gamma + \mu)}{e} \right) I = 0 \tag{5}$$

Persamaan (5) dipenuhi untuk

$$S = \frac{b(\mu + e)(\mu + \gamma)}{\beta e \mu} \text{ atau } I = 0.$$

Untuk $I = 0$, jika nilai I tersebut disubstitusikan pada persamaan pertama dan ketiga Sistem (3) diperoleh :

$$S = \frac{b}{\mu} > 0 \text{ dan } E = 0.$$

Jadi, titik ekuilibrium bebas penyakit Sistem (2) adalah :

$$\overline{Q} = \left(\overline{S}, \overline{E}, \overline{I} \right) = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0 \right) \tag{6}$$

Untuk $S = \frac{b(\mu + e)(\mu + \gamma)}{\beta e \mu} > 0$, dari persamaan pertama diperoleh :

$$b - \frac{\beta I b \mu (\mu + e)(\gamma + \mu)}{\beta e b \mu} - \frac{\mu b (\mu + e)(\gamma + \mu)}{\beta e \mu} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b(\mu + e)(\gamma + \mu)}{\beta e \mu} \right) \left(\frac{\beta \mu I}{b} + \mu \right) = b$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta \mu I}{b} + \mu = \frac{b \beta e \mu}{b(\mu + e)(\gamma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow \beta \mu I + \mu b = \frac{b \beta e \mu}{(\mu + e)(\gamma + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow \beta \mu I = \mu b \left(\frac{\beta e}{(\mu + e)(\gamma + \mu)} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{b}{\beta} \left(\frac{\beta e}{(\mu + e)(\gamma + \mu)} - 1 \right) \tag{7}$$

Jika nilai I disubstitusikan pada persamaan (4) diperoleh :

$$E = \frac{b(\gamma + \mu)}{\beta e} \left(\frac{\beta e}{(\mu + e)(\gamma + \mu)} - 1 \right) \tag{8}$$

Dari persamaan (7) dan (8), diperoleh :
$E > 0 \Leftrightarrow I > 0$ dan

$$I > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta e}{(\mu + e)(\gamma + \mu)} > 1$$

Selanjutnya, dimisalkan

$$R_i = \frac{\beta e}{(\mu + e)(\gamma + \mu)} \tag{9}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik Sistem (2) adalah :

$$Q_* = (S_*, E_*, I_*) = \left(\frac{b(\mu + e)(\mu + \gamma)}{\beta e \mu}, \frac{b(\gamma + \mu)}{\beta e} \left(\frac{\beta e}{(\mu + e)(\gamma + \mu)} - 1 \right), \frac{b}{\beta} \left(\frac{\beta e}{(\mu + e)(\gamma + \mu)} - 1 \right) \right)$$

$$= \left(\frac{b}{\mu R_i}, \frac{b(\gamma + \mu)}{\beta e} (R_i - 1), \frac{b}{\beta} (R_i - 1) \right) \tag{10}$$

Teorema 1.

Diberikan $\overline{Q}$, Q_* , *dan* R_i *berturut-turut diberikan oleh* (6), (9), *dan* (10).

(i) *Jika* $R_i < 1$, *maka Sistem* (2) *mempunyai satu titik ekuilibrium* $\overline{Q}$ **.**

(ii) *Jika* $R_i > 1$, *maka Sistem* (2) *mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu* $\overline{Q}$ *dan* Q_*.

Kestabilan Titik Ekuilibrium

Pada bagian ini dianalisis kestabilan lokal dan global masing-masing titik ekuilibrium dari Sistem (2).

Teorema 2.

Diberikan nilai awal $(S_0, E_0, I_0) \in R_+^3$, *serta* $\overline{Q}$, Q_*, *dan* R_i *berturut-turut diberikan oleh* (6), (9), *dan* (10).

(i) *Jika* $R_i < 1$, *maka titik ekuilibrium* $\overline{Q}$ *stabil asimtotik lokal dan stabil asimtotik global di* R_+^3.

(ii) *Jika* $R_i > 1$, *maka titik ekuilibrium* Q_* *stabil asimtotik lokal.*

Bukti

(i) Diketahui $R_i = \dfrac{\beta e}{(\mu + e)(\gamma + \mu)} < 1 \quad \Leftrightarrow$

$\beta e < (\mu + e)(\gamma + \mu)$

$$\Leftrightarrow \quad \beta e - (\mu + e)(\gamma + \mu) < 0 \qquad (11)$$

Kestabilan lokal titik ekuilibrium $\overline{Q}$ diselidiki dengan mengevaluasi linearisasi dari Sistem (2) di titik tersebut. Sebelumnya ditentukan matriks Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Z} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Z} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial V} \\ \frac{\partial f_3}{\partial Z} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial V} \end{bmatrix}.$$

Ruas kanan Sistem (2) berturut-turut merupakan f_1, f_2, dan f_3, sehingga

$$J = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\beta I}{N} + \mu\right) & 0 & -\frac{\beta S}{N} \\ \frac{\beta I}{N} & -(\mu + e) & \frac{\beta S}{N} \\ 0 & e & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Jika titik ekuilibrium $\overline{Q} = (\overline{S}, \overline{E}, \overline{I}) = \left(\dfrac{b}{\mu}, 0, 0\right)$ dan $\overline{N} = \dfrac{b}{\mu} = \overline{S}$ dievaluasi-kan pada matriks J pada persamaan (12) diperoleh :

$$J(\overline{Q}) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta \\ 0 & -(\mu + e) & \beta \\ 0 & e & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}.$$

Dari matriks $J(\overline{Q})$ diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\det(\lambda I - J(\overline{Q})) =$$
$$(\lambda + \mu)\left(\lambda^2 + (\gamma + e + 2\mu)\lambda + (\mu + e)(\mu + \gamma) - \beta e\right) = 0. \qquad (13)$$

Persamaan (13) dipenuhi untuk $\lambda = -\mu$,

atau

$$\lambda^2 + (\gamma + e + 2\mu)\lambda + (\mu + e)(\mu + \gamma) - \beta e = 0 \qquad (14)$$

sehingga diperoleh satu nilai eigen negatif. Dengan demikian, tinggal menentukan nilai eigen dari persamaan (14) yang merupakan persamaan karakteristik dari matriks

$$J_1 = \begin{bmatrix} -(\mu + e) & \beta \\ e & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}.$$

Dari matriks tersebut diperoleh :

$$\operatorname{tr}(J_1) = -2\mu - (e + \gamma) < 0$$

dan

$$\det(J_1) = (\mu + e)(\mu + \gamma) - \beta e > 0.$$

Akibatnya semua nilai eigen matriks J_1 mempunyai bagian real negatif. Jadi, titik ekuilibrium $\overline{Q}$ stabil asimtotik lokal.

Selanjutnya kestabilan global titik ekuilibrium $\overline{Q}$ dibuktikan dengan menggunakan metode Lyapunov. Didefinisikan :

$$D = \{(S, E, I) \in R_+^3 : S + E + I \le \frac{b}{\mu}\} \text{ dan}$$

$$\psi_0 : D \subset R_+^3 \to R,$$

dengan fungsi

$$\Phi_0(S, E, I) = eE + (\mu + e)I. \qquad (15)$$

Akan dibuktikan persamaan (15) merupakan fungsi Lyapunov untuk Sistem (2) terhadap titik $\overline{Q}$.

(a) Karena $\Phi_0(S, E, I) = eE + (\mu + e)I$ fungsi linear maka dapat ditunjukkan bahwa Φ_0 fungsi kontinu. Selanjutnya turunan parsial fungsi Φ_0 adalah

$\frac{\partial \Phi_0}{\partial S} = 0$, $\frac{\partial \Phi_0}{\partial E} = e$, dan

$\frac{\partial \Phi_0}{\partial I} = \mu + e$.

Fungsi Φ_0 mempunyai turunan parsial pertama kontinu karena bernilai konstan. Jadi fungsi Φ_0 kontinu dan mempunyai derivatif parsial yang kontinu pada D atau $\Phi_0 \in C'(D)$.

(b) Untuk sebarang $x \in D$, dengan $x \neq \left(\frac{b}{\mu},0,0\right)$ maka $\Phi_0(x) > 0$. Kemudian untuk $\left(\frac{b}{\mu},0,0\right) \in D$ maka $\Phi_0\left(\frac{b}{\mu},0,0\right) = 0$. Jadi fungsi $\Phi_0(x) > 0$ untuk setiap $x \in D$ dan $x \neq \left(\frac{b}{\mu},0,0\right)$, dan $\Phi_0(x) = 0$ untuk $x = \left(\frac{b}{\mu},0,0\right)$.

(c) $\dot{\Phi}_0(S,E,I) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial S}\dot{S} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial E}\dot{E} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial I}\dot{I}$

$$= e\left(\frac{\beta SI}{N} - (\mu+e)E\right) + (\mu+e)(eE - (\gamma+\mu)I)$$

$$= \frac{\beta eSI}{N} - (\mu+e)(\mu+\gamma)I - (\mu+e)eE + (\mu+e)eE$$

$$= \left(\frac{\beta eS}{N} - (\mu+e)(\mu+\gamma)\right)I$$

$$\le (\beta e - (\mu+e)(\mu+\gamma))I \quad \text{(karena } S \le N\text{)}$$

$$= \left(\frac{\beta e}{\mu(\mu+e)(\mu+\gamma)} - 1\right)(\mu+e)(\mu+\gamma)I$$

$$= (R_i - 1)(\mu+e)(\mu+\gamma)I$$

Karena $R_1 < 1$ dan $I \ge 0$, sehingga $\dot{\Phi}_0(S,E,I) \le 0$.

Dari (a), (b), dan (c) maka $\dot{\Phi}_0$ merupakan fungsi Lyapunov. Kemudian akan ditentukan himpunan yang memenuhi sifat $\dot{\Phi}_0(S,E,I) = 0$, misal :

$$H = \{(S,E,I) \in D : \dot{\Phi}_0(S,E,I) = 0\}.$$

Diambil $(S,E,I) \in H$, berarti $I = 0 = I_*$. Untuk $I = 0$, berturut-turut diperoleh $\frac{dE}{dt} = -(\mu+e)E$ dan $\frac{dR}{dt} = -\mu R$, sehingga $E \to 0$ dan $R \to 0$. Karena $N \to \frac{b}{\mu}$, sehingga $S \to \frac{b}{\mu}$.

Jadi, $\left\{\left(\frac{b}{\mu},0,0\right)\right\}$ merupakan himpunan invarian terbesar dalam H. Selanjutnya, karena H tidak memuat solusi kecuali titik ekuilibrium $\overline{Q} = \left(\frac{b}{\mu},0,0\right)$, maka setiap solusi dalam D menuju $\overline{Q}$ untuk $t \to \infty$. Karena $D \subset R^3_+$ himpunan invarian dan setiap solusi dalam D menuju $\overline{Q}$ untuk $t \to \infty$, maka $\overline{Q}$ stabil asimtotik global.

(ii) Kestabilan lokal titik ekuilibrium Q_* diselidiki dengan mengevaluasi linearisasi Sistem (2) di titik tersebut. Jika titik ekuilibrium Q_* dievaluasikan pada matriks J pada persamaan (12) diperoleh

$$J(Q_*) = \begin{bmatrix} -\mu R_i & 0 & -\frac{\beta}{R_i} \\ \mu(R_i - 1) & -(\mu+e) & \frac{\beta}{R_i} \\ 0 & e & -(\mu+\gamma) \end{bmatrix}.$$

Dari matriks $J(Q_*)$ diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$\det(\lambda I - J(Q_*))$$

$$= -(\mu R_i + \lambda)((\mu+e)(\mu+\gamma) + ((\mu+e)+(\mu+\gamma))\lambda$$

$$+ \lambda^2 - \frac{\beta e}{R_i}) + (\mu - \mu R_i)\left(\frac{\beta e}{R_i}\right) = 0 \qquad (16)$$

Persamaan (16) dapat ditulis dalam bentuk

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

dengan

$b_1 = (\mu+e) + (\mu+\gamma) + \mu R_i$,

$b_2 = (\mu+e)(\mu+\gamma) + ((\mu+e)+(\mu+\gamma))\mu R_i - \frac{\beta e}{R_i}$

$= ((\mu+e)+(\mu+\gamma))\mu R_i$,

$$b_3 = \mu R_i(\mu+e)(\mu+\gamma) - \frac{\mu\beta e}{R_i}$$

$$= \mu R_i(\mu+e)(\mu+\gamma) - \mu(\mu+e)(\mu+\gamma)$$
$$= \mu(\mu+e)(\mu+\gamma)(R_i - 1)$$

Berdasarkan kriteria kestabilan Reouth Hurwitz, semua nilai eigen matriks $J(Q_*)$ mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$\Delta_1 = b_1 > 0$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = b_1b_2 - b_3 > 0$,

$\Delta_3 = b_3\Delta_2 = b_3(b_1b_2 - b_3) > 0$.

(a) Karena $\mu, e, \gamma > 0$ dan $R_i > 0$, sehingga $b_1 > 0$.

(b) $b_1b_2 - b_3 =$

$$((\mu+e)+(\mu+\gamma)+\mu R_i)(((\mu+e)+(\mu+\gamma))\mu R_i)$$
$$-\mu(\mu+e)(\mu+\gamma)(R_i-1)$$

$$= 2\mu^3R_i^2 + \gamma\mu^2R_i^2 + e\mu^2R_i^2 + 4\mu^3R_i + 4\gamma\mu^2R_i + 4e\mu^2R_i$$
$$+\gamma^2\mu R_i + 2e\gamma\mu R_i + e^2\mu R_i - \mu^3 - \gamma\mu^2 - e\mu^2 - e\mu\gamma$$
$$= 2\mu^3R_i^2 + \gamma\mu^2R_i^2 + e\mu^2R_i^2 + \mu^3(4R_i - 1)$$
$$+\gamma\mu^2(4R_i - 1) + e\mu^2(4R_i - 1) + \gamma^2\mu R_i$$
$$+ e\gamma\mu(2R_i - 1) + e^2\mu R_i.$$

Karena $R_i > 0$, sehingga $b_1b_2 - b_3 > 0$.

(c) Karena $b_3 > 0$ dan $b_1b_2 - b_3 > 0$, sehingga $b_3(b_1b_2 - b_3) > 0$.

Dari (a), (b), dan (c) maka semua nilai eigen $J(Q_*)$ mempunyai bagian real negatif. Jadi, titik ekuilibrium Q_* stabil asimtotik lokal.

SIMPULAN

Adapun kesimpulan dari penelitian ini adalah :

1. Model epidemi SEIR merupakan model penyebaran penyakit yang terjadi pada kelompok-kelompok individu yang berbeda, yaitu kelas *susceptible* (kelas individu yang rentan penyakit), kelas *exposed* (kelas individu yang telah terinfeksi namun belum sakit atau masa laten), kelas *infected* (kelas individu yang telah terjangkit penyakit) dan kelas *recovered* (kelas individu yang telah sembuh).
2. Model matematika epidemi SEIR dengan laju insidensi yang memiliki kemampuan infeksi pada periode laten, infeksi dan sembuh adalah :

$$\frac{dS}{dt} = b - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \;;\; t \geq 0,$$
$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu+e)E \;;\; t \geq 0,$$
$$\frac{dI}{dt} = eE - (\gamma+\mu)I; \quad t \geq 0,$$
$$\frac{dR}{dt} = \sigma I - \mu R; \mathrm{t} \geq 0,$$
$$S(0) = S_0,\; E(0) = E_0,\; I(0) = I_0$$

3. Kestabilan titik-titik ekuilibrium model epidemi SEIR diatas adalah stabil asimtotik lokal dengan menyelidiki linearisasi dari sistem persamaan diferensial model epidemi SEIR. Selanjutnya titik-titik ekuilibrium tersebut diselidiki dengan menggunakan metode Lyapunov dan diperoleh bahwa titik ekuilibriumnya stabil asimtotik global.

SARAN

Karena berbagai keterbatasan, penulis menyadari penelitian dan tulisan ini masih banyak kekurangannya. Banyak hal yang belum tercakup dalam penelitan ini. Perlu dikaji lebih lanjut generalisasi untuk kestabilan model epidemi lainnya dan simulasi numeriknya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton H, dan Rorres,C.,2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*, Edisi Kedelapan, alih bahasa oleh Indriasari,R dan Harmaen,I., Erlangga, Jakarta.

Arrowsmith, D.R. dan Place, C.M., 1992, *Dynamical System Differential Equation, Maps and Chaotic Behaviour*, Chapman & Hall Mathematic, London.

Bazaraa, M.S., Sheraly, H.D, and Shetty, C.M., *Nonlinear Programming Theory* *and Algorithms*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1993.

Becerra, M.V., 2008. *La Salle's Invariant Set Theory*, http://www.personal.rdg.ac.uk/~shs99vmb/notes/anc/lecture3.pdf

Boyd, Stephen, 2008, *Basic Lyapunov Theory*, Stanford University, http://www.stanford.edu/class/ee363/lyap.pdf

Capazzo, V., *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2008.

Chong, K.P and Stainslow, H.Z., *An Introduction to Optimization*, John Wiley & Sons, University of New Hampshire, 1984.

Debarre, F., *SIR Models of Epidemics*, Theoretical Biology.

Gantmacher, F.R., 1959, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York.

Hanh, Wolfgang, 1967, *Stability of Motion*, Springer – Verlag, New York.

Hirsch, M.W., dan Smith, *Monotone Dynamical Systems*, University of California, Berkeley, 2004.

Iwami. S, Takeuchi, Y., dan Liu, X., 2007. *Avian – human Influenza Epidemic Model*, Mathematical Biosciences 2007, hal 1-25.

Feng J., dan Hadeler,K.P., *Qualitative Behaviour of Some Simple Networks*, Mathematical Gen. 1996, hal 5019-5033.

Kocak, H. dan Hole, J.K., 1991, *Dynamic and Bifurcation*, Springer – Verlag, New York.

Leon, J.S., *Aljabar Linear dan Aplikasinya*, Edisi Kelima, Alih bahasa olehBondan,A. Erlangga, Jakarta, 1998.

Luenberger, G.D., 1979, *Introduction to Dynamic System Theory*, Models & Aplication, John Wiley & Sons, New York.

Ngwenga, O., *The Role of Incidence Functions on the Dynamics of SEIR Model*, African Institute for Mathematical Science (AIMS), 2009.

Olsder, G.J., 1994, *Mathematical System Theory*, Delftse Uitgevers Maatschappij, Netherlands.

Perko L., 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer – Verlag, New York.

Ross, S.L., *Differential Equations*, 3^{rd} edition, John Wiley & Sons, University of New Hampshire, 1984.

Verhultz, Ferdinand, 1990, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer – Verlag, Berlin.

Wiggins S, 1990, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer – Verlag, New York.